

## **ТЕМА 20. Дослідження функції за допомогою похідної. Побудова графіків функцій. (10.10.2018 р.)**

### **Зміст**

|                                                                                                                                      |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Розділ I. Теоретичні відомості.....</b>                                                                                           | <b>2</b>  |
| 1.1 Застосування похідної до дослідження функції і побудови її графіка (умови зростання, спадання, екстремуми, точки перегину) ..... | 2         |
| 1.1.1 Ознака зростання і спадання функції на деякому проміжку. ....                                                                  | 2         |
| 1.1.2 Точки екстремуму та екстремум функції. ....                                                                                    | 3         |
| 1.1.3 Необхідна умова екстремуму, поняття стаціонарної точки. ....                                                                   | 4         |
| 1.1.4 Достатня ознака екстремуму функції.....                                                                                        | 5         |
| 1.1.5 Точки перегину.....                                                                                                            | 5         |
| 1.2 Схема дослідження функції $y = f(x)$ та побудови її графіка. ....                                                                | 7         |
| <b>Розділ II. Тестові завдання.....</b>                                                                                              | <b>9</b>  |
| <b>Розділ III. Завдання з установленням відповідності .....</b>                                                                      | <b>19</b> |
| <b>Розділ IV. Завдання з відкритою формою відповіді .....</b>                                                                        | <b>27</b> |
| <b>Використані джерела .....</b>                                                                                                     | <b>29</b> |

## Розділ I. Теоретичні відомості

### 1.1 Застосування похідної до дослідження функції і побудови її графіка (умови зростання, спадання, екстремуми, точки перегину)

#### 1.1.1 Ознака зростання і спадання функції на деякому проміжку.

За допомогою похідної можна встановлювати проміжки зростання і спадання функції.

Відомо, що функція  $y = f(x)$  називається **зростаючою на деякому проміжку**, якщо для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ , що належать проміжку, із умови  $x_2 > x_1$  випливає, що  $f(x_2) > f(x_1)$ .

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, як видно з рис.1, утворює з додатним напрямом осі  $Ox$  або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична паралельна осі  $Ox$ ).

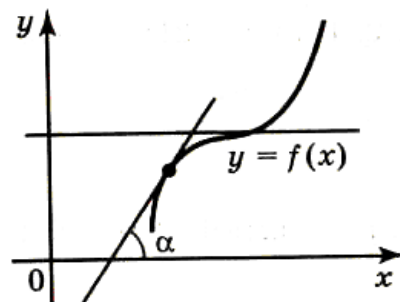


Рисунок 1

Виходячи із геометричного змісту похідної:  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ , це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід'ємна, тому для зростаючої функції  $f(x)$  виконується умова:  $f'(x) \geq 0$ .

Функція  $y = f(x)$  називається **спадною на проміжку**, якщо для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ , що належать цьому проміжку, із умови  $x_2 > x_1$  випливає, що  $f(x_2) < f(x_1)$ .

Дотична в кожній точці графіка спадної функції, як видно з рис.2, утворює з віссю  $Ox$  або тупий кут, або кут, що дорівнює нулю, тому для функції  $f(x)$ , яка спадає на деякому проміжку, виконується умова  $f'(x) \leq 0$ .

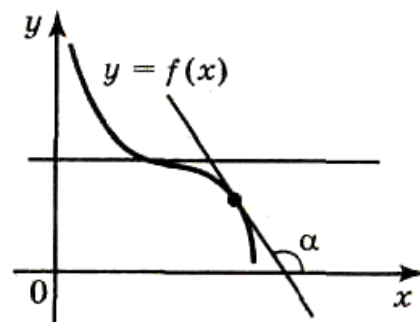


Рисунок 2

На рис. 3 видно також, що одна і та ж функція може на одному проміжку області її визначення зростати, а на іншому — спадати. Характер поведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її похідної.

Отже, наочне уявлення дозволяє формувати властивості зростаючих та спадних функцій.

Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована і зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не від'ємна.

Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку не додатна.

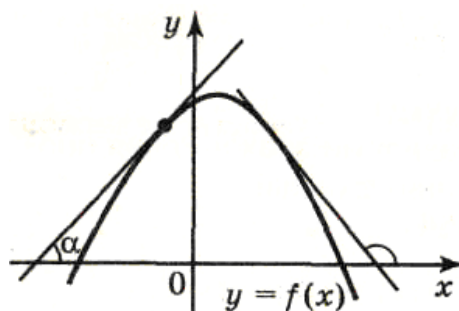


Рисунок 3

Проте для розв'язування задач особливо важливими є обернені твердження, які виражають ознаки зростання і спадання функції на проміжку.

Нехай значення похідної функції  $y = f(x)$  додатні на деякому проміжку, тобто  $f'(x) > 0$ . Оскільки  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ , 1 то із умови  $\operatorname{tg} \alpha > 0$  випливає, що дотичні, проведені до графіка функції в будь-якій точці цього інтервалу, утворюють гострі кути з додатним напрямом осі  $Ox$ . У цьому випадку графік функції «піднімається» на заданому проміжку, тобто функція зростає рис.4.

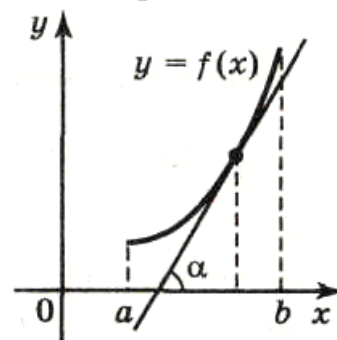


Рисунок 4

Якщо  $f'(x) < 0$  на деякому проміжку, то кутовий коефіцієнт дотичної  $\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$  до графіка функції  $y = f(x)$  від'ємний. Це означає, що дотична до графіка функції утворює з віссю  $Ox$  тупий кут і графік функції на цьому проміжку «опускається», тобто функція  $f(x)$  спадає рис.5.

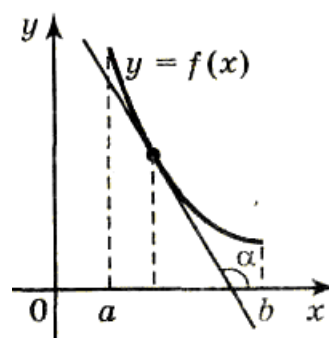


Рисунок 5

### Ознаки зростання (спадання) функції на проміжку:

**Якщо  $f'(x) > 0$  на проміжку, то функція  $f(x)$  зростає на цьому проміжку.**

**Якщо  $f'(x) < 0$  на проміжку, то функція  $f(x)$  спадає на цьому проміжку.**

Знаходження проміжків зростання та спадання функції можна виконувати за таким **планом**:

1. Знайти область визначення заданої функції  $y = f(x)$ .
2. Знайти похідну  $f'(x)$ .
3. Розв'язати нерівності:
  - а)  $f'(x) > 0$ , указати проміжки зростання функції;
  - б)  $f'(x) < 0$ , указати проміжки спадання функції.

### 1.1.2 Точки екстремуму та екстремум функції.

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. **Околом точки  $a$**  називається будь-який інтервал, що містить цю точку.

Наприклад, інтервали  $(2; 5)$ ,  $(2,5; 3,5)$ ,  $(2,9; 3,1)$  - околи точки 3.

Розглянемо графік функції, зображений на рис.6

Як видно із рисунка, існує такий окіл точки  $x = a$ , що найбільше значення функція  $y = f(x)$  в цьому околі набуває в точці  $x = a$ .

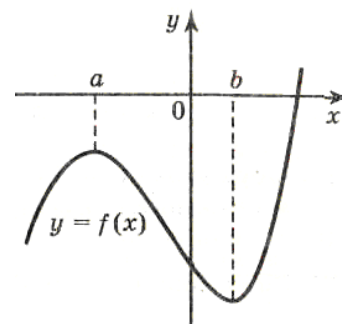


Рисунок 6

Точку  $x = a$  називають **точкою максимуму** функції.

Аналогічно точку  $x = b$  називають **точкою мінімуму** функції  $y = f(x)$ , оскільки значення функції в цій точці найменше порівняно зі значеннями функції в деякому околі точки  $b$ .

**Означення.** Точка  $a$  із області визначення функції  $y = f(x)$  називається **точкою максимуму** цієї функції, якщо існує такий окіл точки  $a$ , що для всіх  $x \neq a$  із цього околу виконується нерівність  $f(x) < f(a)$  рис.7.

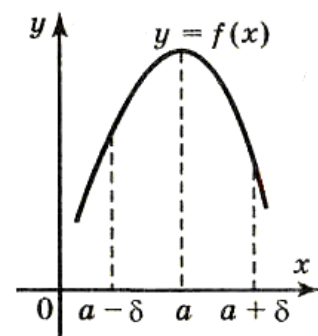


Рисунок 7

**Означення.** Точка  $b$  із області визначення функції  $y = f(x)$  називається **точкою мінімуму** цієї функції, якщо існує такий окіл точки  $b$ , що для всіх  $x \neq b$  із цього околу виконується нерівність  $f(x) > f(b)$  рис.8.

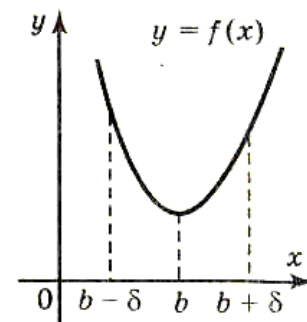


Рисунок 8

Точки максимуму і точки мінімуму називають **точками екстремуму** функції, а значення функції в цих точках називають екстремумами функції (максимум і мінімум функції).

Точки максимуму позначають  $x_{max}$ , а точки мінімуму —  $x_{min}$ .

Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми функції, позначаються відповідно:  $y_{max}$  і  $y_{min}$ .

### 1.1.3 Необхідна умова екстремуму, поняття стаціонарної точки.

Розглянемо функцію  $y = f(x)$ , яка визначена в деякому околі точки  $x_0$  і має похідну в цій точці.

**Якщо  $x_0$  - точка екстремуму диференційованої функції  $y = f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .**

Це твердження називають **теоремою Ферма** на честь П'єра Ферма (1601—1665) — французького математика.

Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: в точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт  $f'(x_0)$  дорівнює нулю рис.9.

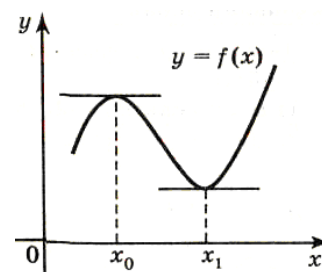


Рисунок 9

Слід зазначити, що якщо  $f'(x_0) = 0$ , то  $x_0$  не обов'язково є точкою екстремуму.

Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рівняння  $f'(x_0) = 0$ , але не завжди корінь рівняння  $f'(x_0) = 0$  є точкою екстремуму.

Внутрішні точки області визначення функції  $y = f(x)$ , у яких похідна дорівнює нулю, називають **стаціонарними**.

Отже, для того щоб точка  $x_0$  була точкою екстремуму, необхідно, щоб вона була стаціонарною.

#### 1.1.4 Достатня ознака екстремуму функції.

Сформулюємо достатні умови того, що стаціонарна точка є точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч — від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак з «+» на «-», то ця стаціонарна точка є **точкою максимуму**.

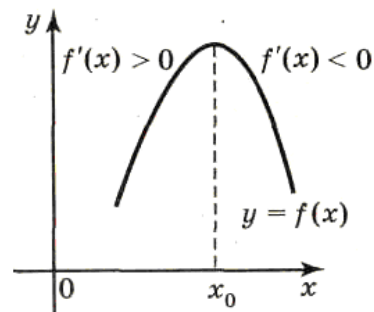


Рисунок 10

Дійсно, в цьому випадку ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч — спадає, отже, дана точка є точкою максимуму рис.10.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч — додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак з «—» на «+», то ця стаціонарна точка є **точка мінімуму** рис.11.

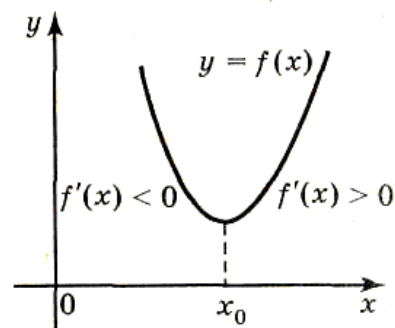


Рисунок 11

Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знак, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка **не є точкою екстремуму**.

#### 1.1.5 Точки перегину.

##### 1.1.5.1. Про поняття опуклості графіка функції.

При побудові графіка функції, як правило, треба дослідити опуклість (вгору або вниз) графіка функції на окремих ділянках з області визначення заданої функції.

**Означення.** Кажуть, що на інтервалі  $(a;b)$  графік неперервно диференційованої функції  $y = f(x)$  **обернений опуклістю вгору**, якщо похідна  $f'(x)$  спадає на інтервалі  $(a;b)$ .

**Означення.** Кажуть, що на інтервалі  $(a;b)$  графік неперервно диференційованої функції  $y = f(x)$  **обернений опуклістю вниз**, якщо похідна  $f'(x)$  зростає на інтервалі  $(a;b)$ .

##### 1.1.5.2. Достатні умови опуклості графіка функції.

**Теорема.** Нехай функція  $y = f(x)$ , має першу і другу похідні.

Тоді, якщо  $f''(x) < 0$  для всіх  $x \in (a; b)$ , то на інтервалі  $(a; b)$  графік функції обернений опуклістю вгору, якщо ж  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (a; b)$ , то графік функції обернений вниз на цьому інтервалі  $(a; b)$ .

Зауваження. Умова знакосталості другої похідної, будучи достатньою умовою опуклості (вгору або вниз) графіка функції, не є одночасно необхідною умовою.

**Інтервалами опуклості** графіка функції називаються інтервали, в яких графік функції обернений опуклістю вгору або вниз.

#### **Правило знаходження інтервалів опуклості:**

1. знайти критичні точки функції  $y = f(x)$  (за другою похідною), які належать інтервалу  $(a; b)$ , тобто точки, в яких або  $f''(x) = 0$  або  $f''(x)$  не існує.
2. в кожному з інтервалів, на які розбивається інтервал  $(a; b)$  критичними точками функції  $y = f(x)$ , знайденими в першому пункті даного правила, встановлюється знак  $f''(x)$ .

Якщо в даному інтервалі  $f''(x) > 0$ , то на цьому інтервалі графік функції  $y = f(x)$  обернений опуклістю вниз, якщо ж  $f''(x) < 0$ , то на цьому інтервалі графік функції  $y = f(x)$  обернений опуклістю вгору.

#### **1.1.5.3. Точки перегину.**

**Точкою перегину** графіка функції  $y = f(x)$  називається точка графіка функції  $y = f(x)$ , яка розділяє інтервали опуклості графіка цієї функції.

Очевидно, що в точці перегину дотична до графіка кривої повинна з одного боку лежати вище графіка кривої, а з другого – нижче його, тобто перетинати криву в цій точці.

**Необхідна умова.** Нехай функція  $y = f(x)$  визначена й має неперервні похідні до другого порядку включно на інтервалі  $(a; b)$ . Тоді, якщо точка  $(x_0; y_0)$ , де  $x_0 \in (a; b)$ , є точкою перегину графіка функції  $y = f(x)$ , то  $f''(x) = 0$ .

**Достатня умова.** Якщо функція  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in (a; b)$ , має похідні першого і другого порядку на інтервалі  $(a; b)$  і її друга похідна змінює знак при переході аргументу через  $x_0 \in (a; b)$ , то  $x_0$  є абсцисою точки перегину графіка функції  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in (a; b)$ .

#### **1.1.5.4. Правило знаходження точок перегину графіка функції:**

1. знайти критичні точки функції  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in (a; b)$ , які належать інтервалу  $(a; b)$ .
2. дослідити знак другої похідної  $f''(x)$  в деякому околі кожної точки  $x_0$  (окіл вибирається так, щоб в нього потрапили інші критичні точки).

При цьому, якщо  $f''(x)$  змінює знак при переході аргументу через таку точку  $x_0$ , то точка  $(x_0; y_0)$  є точкою перегину графіка функції  $y = f(x)$ ,  $x_0 \in (a; b)$

## 1.2 Схеми дослідження функції $y = f(x)$ та побудови її графіка.

Можна запропонувати наступну схему дослідження функції  $y = f(x)$  та побудови її графіка:

- 1) Знаходимо область визначення функції  $y = f(x)$ .
- 2) Досліджуємо функцію на парність, непарність та періодичність (для тригонометричних функцій).
- 3) Знаходимо точки перетину функції  $y = f(x)$  з осями координат (якщо їх можна знайти).
- 4) Знаходимо похідну  $f'(x)$  та критичні точки.
- 5) Знаходимо проміжки зростання, спадання, точки екстремуму, екстремуми функцій.
- 6) Досліджуємо поведінку функції на кінцях проміжків області визначення (якщо можна дослідити).
- 7) Використовуючи отримані результати, будуємо графік функцій або його ескіз.

**Приклад 1.** Дослідити функцію  $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4$  та побудувати її графік.

Розв'язання.

- 1) Область визначення:  $D(f) = \mathbb{R}$ .
- 2)  $f(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (-x)^2 - 4 = \frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = f(x)$ ; функція парна, її графік симетричний відносно осі ординат.
- 3) Точка перетину з віссю Оу:  $x = 0$ ;  $y = \frac{1}{2} \cdot 0^4 - 0^2 - 4$ ;  $y = -4$ .
- Точки перетину з віссю Ох:  $y = 0$ ;  $\frac{1}{2}x^4 - x^2 - 4 = 0$ ;  $x_1 = -2$ ;  $x_2 = 2$  (розв'яжіть рівняння самостійно).
- Отже, маємо точки перетину з осями координат:  $(0; -4)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(-2; 0)$ .
- 4)  $f'(x) = 2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$  критичні точки  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = -1$ .

5) Складаємо таблицю у якій позначаємо проміжки зростання, проміжки спадання та критичні точки:

|          |                 |      |                 |     |                |      |                 |
|----------|-----------------|------|-----------------|-----|----------------|------|-----------------|
| $x$      | $(-\infty; -1)$ | -1   | $(-1; 0)$       | 0   | $(0; 1)$       | 1    | $(1; +\infty)$  |
| $f'(x)$  | -               | 0    | +               | 0   | -              | 0    | +               |
| $f(x)$   | $\searrow$      | -4,5 | $\nearrow$      | -4  | $\searrow$     | -4,5 | $\nearrow$      |
| Висновок | Функція спадає  | min  | Функція зростає | max | Функція спадає | min  | Функція зростає |

В таблиці наведено також висновки про критичні точки (чи є вони точками максимуму чи точками мінімуму).

6) Оскільки  $D(f) = \mathbb{R}$ , то немає кінців області визначення.

7) Будуємо графік функції використовуючи результати дослідження - рис.12.

Побудова графіка функцій (або його ескізу) допомагає при розв'язуванні деяких задач, пов'язаних із знаходженням коренів рівняння (їхньої кількості, найближчих значень тощо).

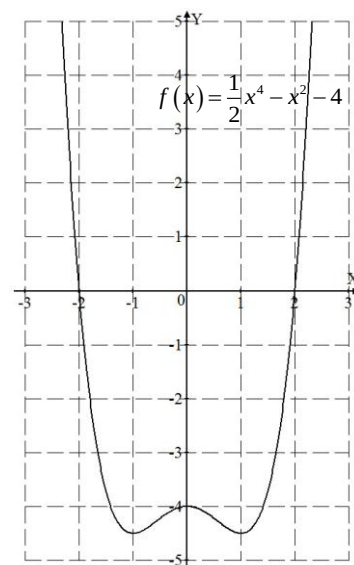


Рисунок 12



## Розділ II. Тестові завдання

1. Визначити проміжок зростання функції  $y = x^2 - 1$ .

| А                    | Б              | В              | Г               | Д              |
|----------------------|----------------|----------------|-----------------|----------------|
| $(-\infty; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | $[1; +\infty)$ | $(-\infty; -1)$ | $(-\infty; 0)$ |

2. Знайти проміжки зростання функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = (x-1)(x+5)$ .

| А                                 | Б          | В         | Г                                 | Д               |
|-----------------------------------|------------|-----------|-----------------------------------|-----------------|
| $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$ | $[-5; -1]$ | $[-5; 1]$ | $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ | $(-\infty; -5)$ |

3. Знайти проміжки спадання функції  $y = \varphi(x)$ , якщо  $\varphi'(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3)$ .

| А         | Б                            | В                           | Г                                 | Д         |
|-----------|------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------|
| $[-3; 2]$ | $(-\infty; -3] \cup [-1; 2]$ | $(-\infty; -2] \cup [1; 3]$ | $(-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$ | $[-2; 3]$ |

4. Знайти проміжки зростання функції  $y = x^2 e^x$ .

| А                    | Б                                 | В              | Г               | Д              |
|----------------------|-----------------------------------|----------------|-----------------|----------------|
| $(-\infty; +\infty)$ | $(-\infty; -3] \cup [0; +\infty)$ | $[1; +\infty)$ | $(-\infty; -1)$ | $(-\infty; 0)$ |

5. Знайти проміжки спадання функції  $y = \sin^2 x$ .

| А | $\left[ \frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$   |
|---|-------------------------------------------------------------------------|
| Б | $\left[ \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n \right], n \in \mathbb{Z}$ |
| В | $[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}$                       |
| Г | $\left[ \pi + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}$   |
| Д | $(-\infty; +\infty)$                                                    |

6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

| А          | Б              | В                  | Г             | Д             |
|------------|----------------|--------------------|---------------|---------------|
| $y = -x^7$ | $y = \cos^2 x$ | $y = \ln(x^2 + 1)$ | $y = e^{x^3}$ | $y = e^{ x }$ |

7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якій проміжком спадання є проміжок  $[0; +\infty)$ .

| А                       | Б          | В                  | Г             | Д             |
|-------------------------|------------|--------------------|---------------|---------------|
| $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ | $y = xe^x$ | $y = \ln(x^3 + 1)$ | $y = e^{x^5}$ | $y = e^{x^2}$ |

8. Скільки критичних точок має функція  $y = f(x)$ , зображена на рисунку 13?

| А    | Б   | В   | Г      | Д                  |
|------|-----|-----|--------|--------------------|
| одну | дві | три | чотири | більше, ніж чотири |

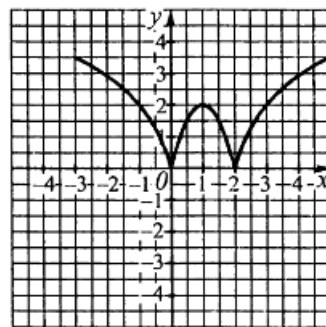


Рисунок 13

9. Знайти критичні точки функції  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ .

| А | Б       | В      | Г     | Д      |
|---|---------|--------|-------|--------|
| 0 | -3 і -1 | -3 і 1 | 1 і 3 | -1 і 3 |

10. Вказати критичні точки функції  $y = x(x - 4)^3$ .

| А    | Б | В    | Г | Д |
|------|---|------|---|---|
| 0; 4 | 4 | 1; 4 | 3 | 1 |

11. Знайти критичну точку функції  $y = 2x^2 - 4x$ .

| А  | Б | В | Г | Д |
|----|---|---|---|---|
| -1 | 1 | 4 | 0 | 2 |

12. Знайти критичні точки функції  $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$ .

| А        | Б     | В | Г    | Д |
|----------|-------|---|------|---|
| -2; 2; 0 | -2; 2 | 2 | 2; 0 | 0 |

13. Знайти точки максимуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = x(x + 3)(x - 5)$ .

| А     | Б  | В | Г | Д     |
|-------|----|---|---|-------|
| -3; 5 | -3 | 0 | 5 | 0 і 5 |

14. Знайти точку мінімуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = x(x - 2)^2(x - 5)$ .

|   |   |   |       |       |
|---|---|---|-------|-------|
| А | Б | В | Г     | Д     |
| 5 | 2 | 0 | 0 і 5 | 0 і 2 |

15. Визначити усі критичні точки функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[-4; 4]$ , якщо на рисунку 14 зображено графік функції  $f'(x)$ .

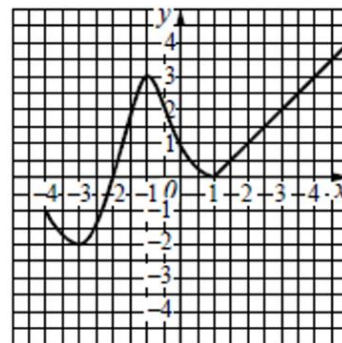


Рисунок 1

|            |         |        |        |        |
|------------|---------|--------|--------|--------|
| А          | Б       | В      | Г      | Д      |
| -3; -1 і 1 | -3 і -1 | -2 і 1 | -4 і 4 | -3 і 1 |

16. Вказати усі точки екстремуму функції  $y = f(x)$  на відрізку  $[-3; 4]$ , якщо на рисунку 15 зображено графік функції  $f'(x)$ .

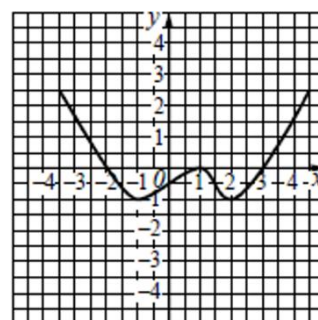


Рисунок 2

|         |           |           |        |        |
|---------|-----------|-----------|--------|--------|
| А       | Б         | В         | Г      | Д      |
| -1 і -2 | -1; 1 і 2 | -2; 1 і 3 | -2 і 3 | -3 і 4 |

17. Вказати проміжки зростання функції  $y = \varphi(x)$  на відрізку  $[-5; 5]$ , якщо на рисунку 16 зображено графік функції  $y = \varphi'(x)$ .

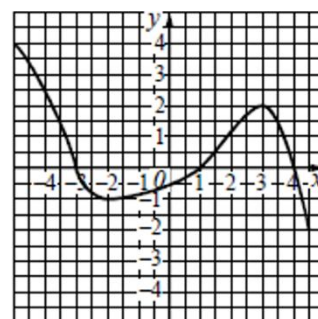


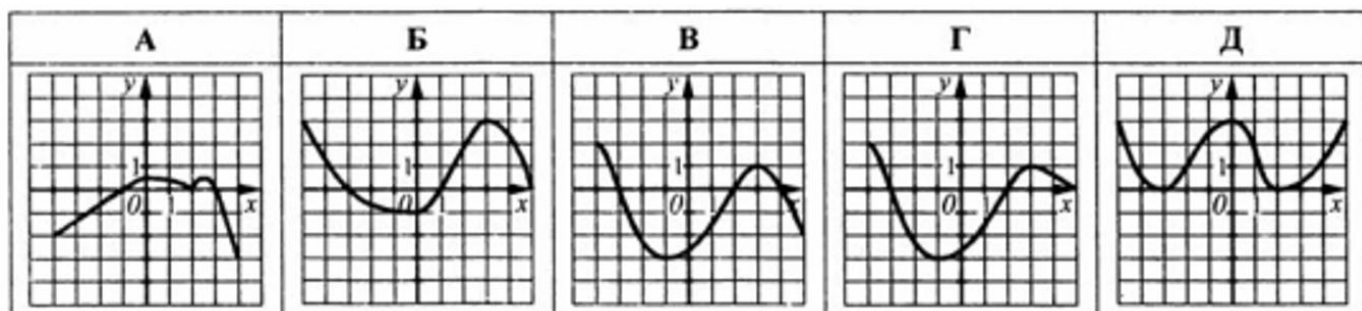
Рисунок 3

|           |           |                      |          |                       |
|-----------|-----------|----------------------|----------|-----------------------|
| А         | Б         | В                    | Г        | Д                     |
| $[-2; 3]$ | $[-1; 2]$ | $[-2; 1]$ і $[4; 5]$ | $[1; 3]$ | $[-5; -3]$ і $[1; 4]$ |

18. Функція  $y = f(x)$  визначена на множині дійсних чисел; -3 і 2 – нулі функції. Зміну знаків похідної функції подано в таблиці.

|                 |              |             |             |                |
|-----------------|--------------|-------------|-------------|----------------|
| $(-\infty; -1)$ | -1           | $(-1; 3)$   | 3           | $(3; +\infty)$ |
| $f'(x) < 0$     | $f'(-1) = 0$ | $f'(x) > 0$ | $f'(3) = 0$ | $f'(x) < 0$    |

Який з наведених графіків може бути графіком функції  $y = f(x)$ ?



19. На рисунку 17 зображено графік функції  $f'(x)$ . Який з наведених графіків може бути графіком функції  $y = f(x)$ ?

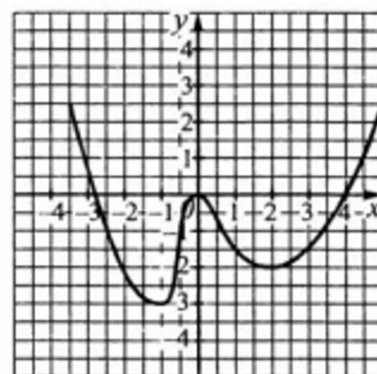
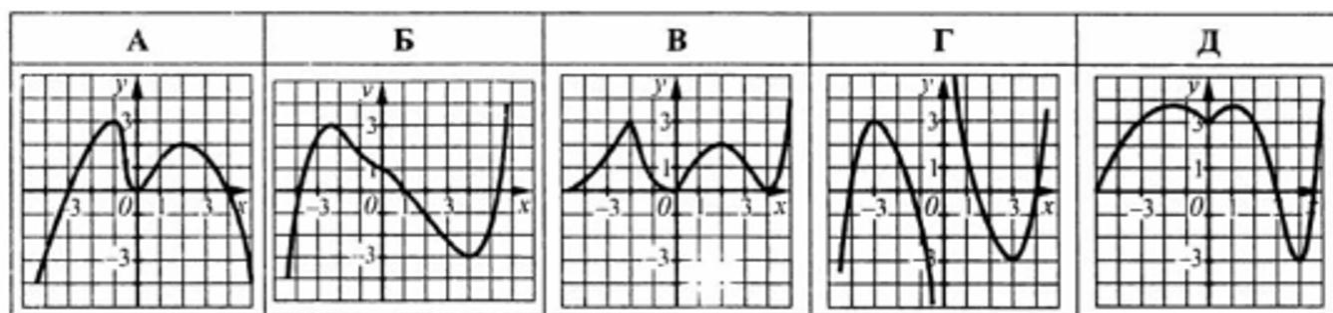


Рисунок 17



20. Знайти точку, в якій функція  $y = x \ln x$  набуває найменшого значення.

| А               | Б             | В | Г   | Д     |
|-----------------|---------------|---|-----|-------|
| $\frac{1}{e^2}$ | $\frac{1}{e}$ | 1 | $e$ | $e^2$ |

21. Знайти точку максимуму функції  $y = \frac{\ln x}{x}$ .

| А             | Б                    | В | Г   | Д     |
|---------------|----------------------|---|-----|-------|
| $\frac{1}{e}$ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ | 1 | $e$ | $e^2$ |

22. За яких значень  $a$  функція  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$  має критичні точки, але не має точок екстремумів?

| А  | Б      | В | Г      | Д |
|----|--------|---|--------|---|
| -1 | -1 і 1 | 1 | -4 і 4 | 4 |

23. За яких значень  $a$  точка 5 є точкою мінімуму функції  $y = f(x)$ , якщо  $f'(x) = (x - a)(x - 5)$ ?

| А          | Б       | В       | Г          | Д       |
|------------|---------|---------|------------|---------|
| $a \geq 5$ | $a = 5$ | $a > 5$ | $a \leq 5$ | $a < 5$ |

24. За яких значень  $a$  точка 3 є точкою максимуму функції  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$ ?

| А       | Б          | В          | Г       | Д       |
|---------|------------|------------|---------|---------|
| $a = 3$ | $a \geq 3$ | $a \leq 3$ | $a < 3$ | $a > 3$ |

25. Знайти проміжки зростання (спадання) функції  $f(x) = x^2 - 2x$ .

| А                                                    | Б                                                      | В                                                    | Г                                                    | Д                                                    |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Зростає на $[1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1]$ | Зростає на $[-1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; -1]$ | Зростає на $(1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1]$ | Зростає на $(1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1)$ | Зростає на $[1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1)$ |

26. Знайти проміжки зростання і спадання функції  $f(x) = -\frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 5$ .

| А                                                    | Б                                                    | В                                                    | Г                                                    | Д                                                    |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Зростає на $[0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 0]$ | Зростає на $(-\infty; 0]$ , спадає на $[0; +\infty)$ | Зростає на $(0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 0]$ | Зростає на $(0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 0)$ | Зростає на $[0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1)$ |

27. Знайти проміжки зростання і спадання функції  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7$ .

| А                                                    | Б                                                    | В                                                    | Г                                                    | Д                                                    |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
| Зростає на $[1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1]$ | Зростає на $(-\infty; 0]$ , спадає на $[0; +\infty)$ | Зростає на $(1; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 0]$ | Зростає на $(0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1)$ | Зростає на $[0; +\infty)$ , спадає на $(-\infty; 1)$ |

28. Знайти точки екстремуму функції  $f(x) = 2x^2 - x^4$ .

| А                                 | Б                                | В                                 | Г                                 | Д                                                   |
|-----------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------------------------|
| $x_{\max} = -1$<br>$x_{\min} = 0$ | $x_{\min} = 0$<br>$x_{\max} = 1$ | $x_{\max} = -1$<br>$x_{\min} = 1$ | $x_{\max} = 1$<br>$x_{\min} = -1$ | $x_{\max} = -1$<br>$x_{\min} = 0$<br>$x_{\max} = 1$ |

29. На рис.18 зображено графік функції  $y = f(x)$ .

Укажіть правильну подвійну нерівність.

|   |                          |
|---|--------------------------|
| А | $f'(0) < f'(1) < f'(-1)$ |
| Б | $f'(0) < f'(-1) < f'(1)$ |
| В | $f'(-1) < f'(0) < f'(1)$ |
| Г | $f'(-1) < f'(1) < f'(0)$ |
| Д | $f'(1) < f'(0) < f'(-1)$ |

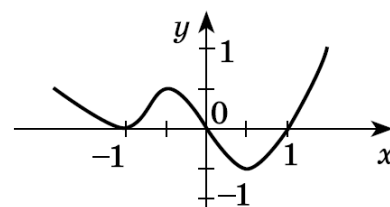


Рисунок 18

30. На рис.19 зображено графік функції  $y = g(x)$ .

Укажіть правильну подвійну нерівність.

|   |                          |
|---|--------------------------|
| А | $g'(1) < g'(-1) < g'(0)$ |
| Б | $g'(1) < g'(0) < g'(-1)$ |
| В | $g'(-1) < g'(0) < g'(1)$ |
| Г | $g'(-1) < g'(1) < g'(0)$ |
| Д | $g'(0) < g'(-1) < g'(1)$ |

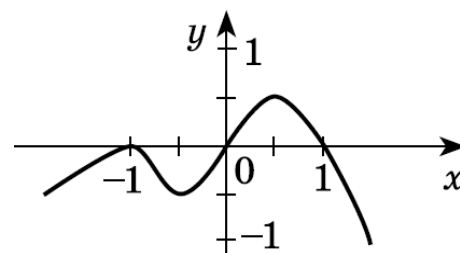


Рисунок 19

31. Скільки коренів має рівняння  $f'(x) = 0$  на проміжку  $[0; 1]$ ?

(1) Рівняння  $f(x) = 0$  має один корінь на проміжку  $[0; 1]$ .

(2) Функція  $f(x)$  є зростаючою на проміжку  $[0; 1]$ .

| А                                     | Б                                     | В                                                   | Г                                      | Д                                                     |
|---------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні | Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні | І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо. | Даних (1) і (2) тільки разом достатньо | Ні даних (1), ні даних (1), навіть разом не достатньо |

32. Скільки коренів має рівняння  $g'(x) = 0$  на проміжку  $[0; 1]$ ?

(1) Рис 20.

(2) Функція  $g(x)$  має дві стаціонарні точки на проміжку  $[0; 1]$ .

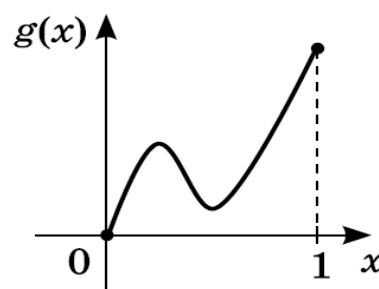


Рисунок 20

| А                                     | Б                                     | В                                                  | Г                                      | Д                                                     |
|---------------------------------------|---------------------------------------|----------------------------------------------------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Даних (1) достатньо, а даних (2) — ні | Даних (2) достатньо, а даних (1) — ні | І даних (1), і даних (2), взятих окремо, достатньо | Даних (1) і (2) тільки разом достатньо | Ні даних (1), ні даних (1), навіть разом не достатньо |

33. На рис.21 зображено фрагмент графіка функції  $y = f(x)$ .

Величина X: значення  $f(3)$ .

Величина Y: значення  $f'(3)$ .

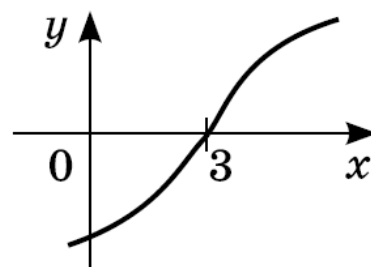


Рисунок 21

| А                                     | Б                                     | В                                    | Г                                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Величина X<br>більша<br>за величину Y | Величина Y<br>більша<br>за величину X | Величини X і Y<br>рівні<br>між собою | Для порівняння<br>величин X і Y<br>недостатньо<br>даних |

34. На рис.14 зображено фрагмент графіка функції  $y = h(x)$ .

Величина X: значення  $h(3)$ .

Величина Y: значення  $h'(3)$ .

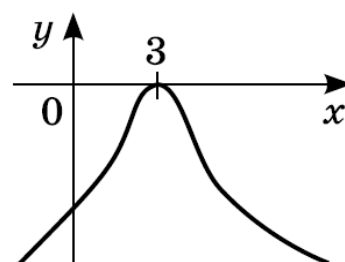


Рисунок 22

| А                                     | Б                                     | В                                    | Г                                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| Величина X<br>більша<br>за величину Y | Величина Y<br>більша<br>за величину X | Величини X і Y<br>рівні<br>між собою | Для порівняння<br>величин X і Y<br>недостатньо<br>даних |

35. Знайдіть критичні точки функції  $y = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 18$

| А    | Б    | В   | Г     | Д    |
|------|------|-----|-------|------|
| -4;1 | -1;4 | 1;4 | -3;-1 | -1;3 |

36. На рисунку 23 зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть точки екстремуму функції  $y = f(x)$ .

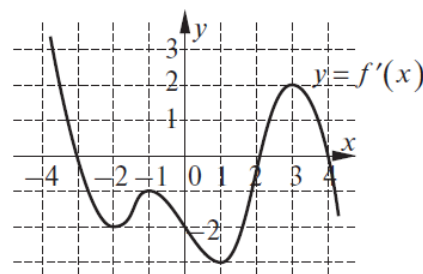


Рисунок 23

| А         | Б   | В    | Г        | Д      |
|-----------|-----|------|----------|--------|
| -2;-1;1;3 | 1;3 | -1;3 | -3;0;2;4 | -3;2;4 |

37. На *рисунку 24* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть кількість точок мінімуму функції  $y = f(x)$ .

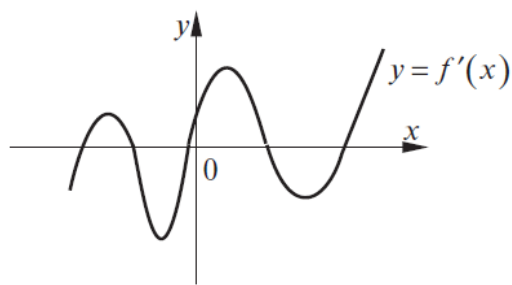


Рисунок 24

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

38. На *рисунку 25* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть проміжки зростання функції  $y = f(x)$ .

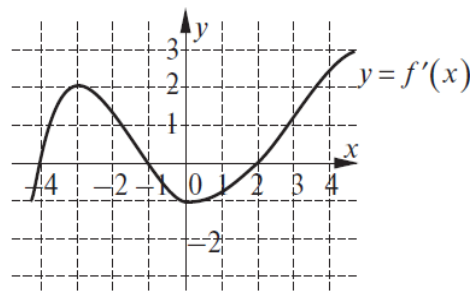


Рисунок 25

| А                                  | Б                                       | В         | Г                                  | Д         |
|------------------------------------|-----------------------------------------|-----------|------------------------------------|-----------|
| $[-4; -1] \text{ і } [2; +\infty)$ | $(-\infty; -3] \text{ і } [0; +\infty)$ | $[-3; 0]$ | $(-\infty; -4] \text{ і } [-1; 2]$ | $[-4; 2]$ |

39. На *рисунку 26* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть проміжки спадання функції  $y = f(x)$ .

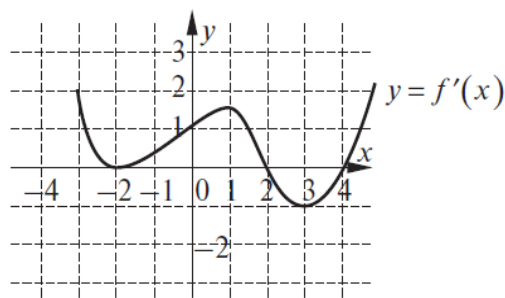


Рисунок 26

| А                                 | Б                                 | В                                      | Г        | Д         |
|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------|----------|-----------|
| $(-\infty; -2] \text{ і } [1; 3]$ | $[-2; 1] \text{ і } [3; +\infty)$ | $(-\infty; 2] \text{ і } [4; +\infty)$ | $[2; 4]$ | $[-2; 2]$ |

40. Знайдіть проміжки зростання функції  $y = 8x - \frac{2}{3}x^3$ .

| А              | Б              | В                                       | Г         | Д        |
|----------------|----------------|-----------------------------------------|-----------|----------|
| $[2; +\infty)$ | $(-\infty; 2]$ | $(-\infty; -2] \text{ і } [2; +\infty)$ | $[-2; 2]$ | $[0; 4]$ |

41. Знайдіть проміжки спадання функції  $y = 4x^3 + 6x^2$ .

| А         | Б                                       | В               | Г         | Д         |
|-----------|-----------------------------------------|-----------------|-----------|-----------|
| $[-1; 0]$ | $(-\infty; -1] \text{ і } [0; +\infty)$ | $(-\infty; -1]$ | $[-1; 1]$ | $[-3; 0]$ |



42. На *рисунку 27* зображено графік функції  $y = f(x)$ . Скільки критичних точок має функція?

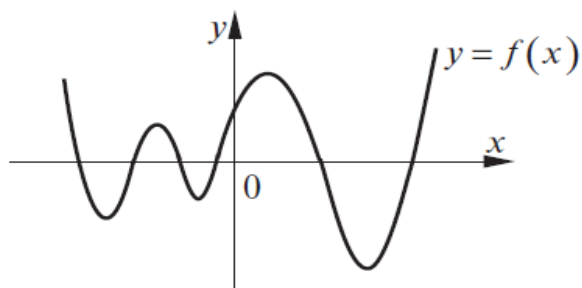


Рисунок 27

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

43. Знайдіть критичні точки функції  $y = 6x^4 - 12x^2 - 11$ .

|      |       |   |          |              |
|------|-------|---|----------|--------------|
| А    | Б     | В | Г        | Д            |
| 0; 1 | -1; 1 | 1 | -1; 0; 1 | -0,5; 0; 0,5 |

44. На *рисунку 28* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть точки екстремуму функції  $y = f(x)$ .

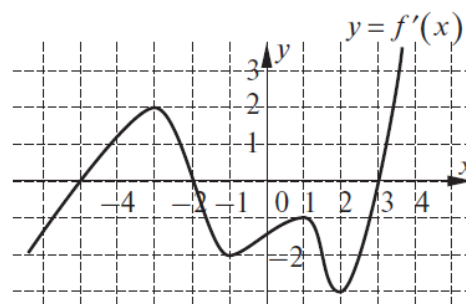


Рисунок 28

|       |              |           |           |              |
|-------|--------------|-----------|-----------|--------------|
| А     | Б            | В         | Г         | Д            |
| -3; 2 | -3; -1; 1; 2 | -5; -2; 3 | -3; -1; 2 | -5; -2; 0; 3 |

45. На *рисунку 29* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть кількість точок максимуму функції  $y = f(x)$ .

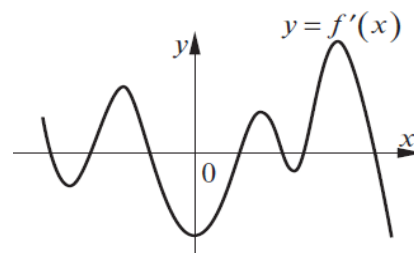


Рисунок 29

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| А | Б | В | Г | Д |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |

46. На *рисунку 30* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть проміжки спадання функції  $y = f(x)$ .

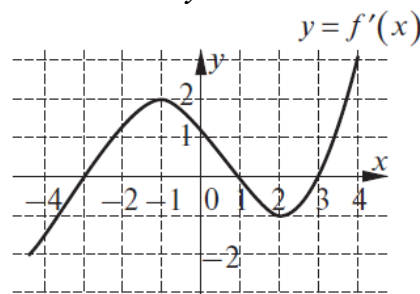


Рисунок 30

|                                   |           |           |                             |                             |
|-----------------------------------|-----------|-----------|-----------------------------|-----------------------------|
| А                                 | Б         | В         | Г                           | Д                           |
| $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ | $[-1; 3]$ | $[-3; 3]$ | $(-\infty; -3] \cup [1; 3]$ | $[-3; 1] \cup [3; +\infty)$ |

47. На *рисунку 31* зображено графік похідної функції  $y = f'(x)$ . Користуючись зображенням, укажіть проміжки зростання функції  $y = f(x)$ .

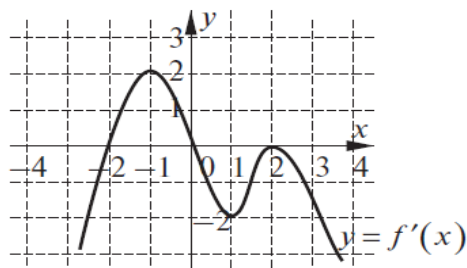


Рисунок 31

| А         | Б                                 | В                           | Г        | Д                           |
|-----------|-----------------------------------|-----------------------------|----------|-----------------------------|
| $[-2; 0]$ | $(-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ | $(-\infty; -1] \cup [1; 2]$ | $[0; 2]$ | $[-1; 1] \cup [2; +\infty)$ |

48. Знайдіть проміжки спадання функції  $y = 3x^3 - 81x$ .

| А         | Б                                 | В               | Г        | Д              |
|-----------|-----------------------------------|-----------------|----------|----------------|
| $[-3; 3]$ | $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ | $(-\infty; -3]$ | $[0; 9]$ | $[3; +\infty)$ |

49. Знайдіть проміжки зростання функції  $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$ .

| А         | Б                                 | В               | Г        | Д                                |
|-----------|-----------------------------------|-----------------|----------|----------------------------------|
| $[-1; 0]$ | $(-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ | $[-1; +\infty)$ | $[0; 1]$ | $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ |

50. На *рисунку 32* зображено графік функції  $y = f(x)$ . Скільки критичних точок має функція?

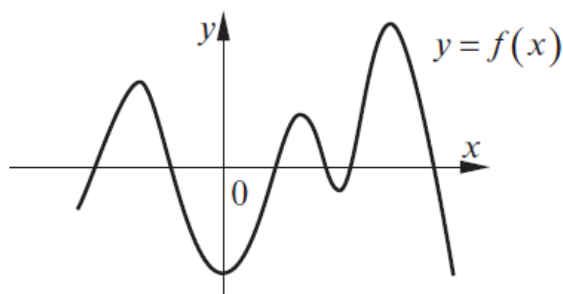


Рисунок 32

| А | Б | В | Г | Д |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

### Розділ III. Завдання з установленням відповідності.

Завдання 51-75 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного цифрою доберіть один відповідник, позначений буквою, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

51. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми властивостями (А-Д).

|                                  |                                         |
|----------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$ | А. зростаюча на всій області визначення |
| 2. $y = 2^{ x } + 2$             | Б. спадна на всій області визначення    |
| 3. $y = 2^x + 2$                 | В. має максимальне значення             |
| 4. $y = -3x^2 + 7x - 14$         | Г. має найменше значення                |
|                                  | Д. періодична                           |

52. Установити відповідність між похідними  $f'$  функцій (1-4) та проміжками спадання відповідних їм функцій (А-Д).

|                        |                                      |
|------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f' = (x+1)(x-5)$   | А. $(-\infty; -1]$                   |
| 2. $f' = (x+1)(5-x)$   | Б. $(-\infty; 5]$                    |
| 3. $f' = (x+1)^2(x-5)$ | В. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ |
| 4. $f' = (x+1)(x-5)^2$ | Г. $[-5; 1]$                         |
|                        | Д. $[-1; 5]$                         |

53. Установити відповідність між похідними  $f'$  функцій (1-4) та проміжками зростання відповідних їм функцій (А-Д).

|                        |                                      |
|------------------------|--------------------------------------|
| 1. $f' = (x+3)(x-4)$   | А. $[4; +\infty)$                    |
| 2. $f' = (x+3)(4-x)$   | Б. $[-3; +\infty)$                   |
| 3. $f' = (x+3)^2(x-4)$ | В. $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$ |
| 4. $f' = (x+3)(x-4)^2$ | Г. $[-3; 4]$                         |
|                        | Д. $[-4; 3]$                         |

54. Установити відповідність між функціями (1-4) та проміжками спадання цих функцій (А-Д).

|                       |                                |
|-----------------------|--------------------------------|
| 1. $y = -3x^5 - 4x$   | А. $(-\infty; 1]$              |
| 2. $y = x^4 - 2x^2$   | Б. $(-\infty; 0]$              |
| 3. $y = e^{x^2-2x+3}$ | В. $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$ |
| 4. $y = e^x - x$      | Г. $[0; +\infty)$              |
|                       | Д. $(-\infty; +\infty)$        |

55. Установити відповідність між похідними  $f'$  функцій (1-4) та точками максимуму функцій  $f(x)$  (А-Д).

|                         |          |
|-------------------------|----------|
| 1. $f' = x(x+2)(x-4)$   | А. -2    |
| 2. $f' = x^2(x+2)(x-4)$ | Б. 4     |
| 3. $f' = x(x+2)(4-x)$   | В. -2; 4 |
| 4. $f' = x^2(x+2)(4-x)$ | Г. -4    |
|                         | Д. 0     |

56. Установити відповідність між похідними  $f'$  функцій (1-4) та точками мінімуму функцій  $f(x)$  (А-Д).

|                             |          |
|-----------------------------|----------|
| 1. $f' = (x+3)(x-1)(x-5)$   | А. 5     |
| 2. $f' = (x+3)(x-1)^2(x-5)$ | Б. 1     |
| 3. $f' = (x+3)(x-1)(5-x)$   | В. -3    |
| 4. $f' = (x+3)(x-1)^2(5-x)$ | Г. -1    |
|                             | Д. -3; 5 |

57. Установити відповідність між функціями (1-4) та проміжками зростання цих функцій (А-Д).

|                       |                                     |
|-----------------------|-------------------------------------|
| 1. $y = 3x - x^2$     | А. $(-\infty; +\infty)$             |
| 2. $y = \sqrt{1-x^2}$ | Б. $[-1; 0]$                        |
| 3. $y = x - \ln x$    | В. $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$ |
| 4. $y = e^x + x - 1$  | Г. $[1; +\infty)$                   |
|                       | Д. $(-\infty; 1,5]$                 |

58. Установити відповідність між функціями (1-4) та їхніми критичними точками (А-Д).

|                            |          |
|----------------------------|----------|
| 1. $y = x^5 - 5x$          | А. 1     |
| 2. $y = x^2 + \frac{2}{x}$ | Б. -1    |
| 3. $y = e^{x^2+2x}$        | В. 0     |
| 4. $y = \sqrt{1-x^2}$      | Г. 0; 2  |
|                            | Д. -1; 1 |

59. Установити відповідність між функціями (1-4) та точками максимуму цих функцій (А-Д).

|                                         |          |
|-----------------------------------------|----------|
| 1. $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ | А. 0     |
| 2. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$  | Б. 1     |
| 3. $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$  | В. -1    |
| 4. $y = -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}$ | Г. -1; 0 |
|                                         | Д. -1; 1 |

60. Установити відповідність між функціями (1-4) та точками мінімуму цих функцій (А-Д).

|                                          |          |
|------------------------------------------|----------|
| 1. $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$            | А. 0     |
| 2. $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$           | Б. 2     |
| 3. $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$  | В. -2; 2 |
| 4. $y = -\frac{x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}$ | Г. -2; 0 |
|                                          | Д. -2    |

61. Функцію задано формулою  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ . Установіть відповідність між завданнями (1-4) та відповідями (А-Д) на них.

|                                                                             |                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. Розв'яжіть рівняння $f'(x) = 0$                                          | А. (2; -11), (0; 5)                  |
| 2. Знайдіть координати точок екстремуму функції $f(x)$ на проміжку $[0; 3]$ | Б. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ |
| 3. Знайдіть проміжки спадання функції $f(x)$                                | В. 0; -2; 2                          |
| 4. Знайдіть проміжки зростання функції $f(x)$                               | Г. $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$       |
|                                                                             | Д. $[-2; 0] \cup [2; +\infty)$       |

62. Установіть відповідність між твердженнями (1-4), які описують похідну функції

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{якщо } x \in [-1; 1], \\ -x^2 + 4x - 3, & \text{якщо } x \in (1; +\infty) \end{cases} \quad \text{у деяких}$$

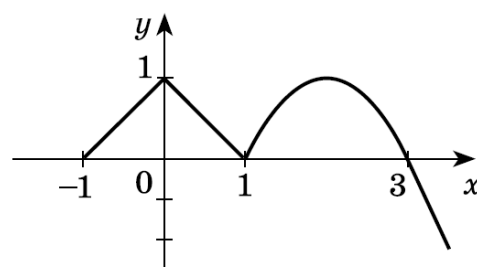


Рисунок 33

точках, і значеннями  $f'(x)$  (А - Д) у цих точках, користуючись рис.33, на якому зображено графік функції  $f(x)$ .

|                    |               |
|--------------------|---------------|
| 1. Дорівнює 1      | А. $f'(0,5)$  |
| 2. Не існує        | Б. $f'(2)$    |
| 3. Дорівнює 0      | В. $f'(-0,5)$ |
| 4. Дорівнює $(-1)$ | Г. $f'(3)$    |
|                    | Д. $f'(1)$    |

63. Установіть відповідність між твердженнями (1-4), які описують похідну функції

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \in (-\infty; 0], \\ \sqrt{10x - x^2}, & \text{якщо } x \in (0; 10] \end{cases} \text{ у деяких}$$

точках, і значеннями  $f'(x)$  (А - Д) у цих точках, користуючись рис.34, на якому зображено графік функції  $f(x)$ .

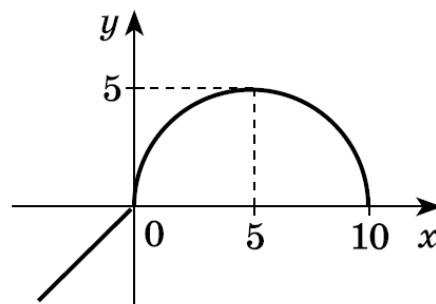
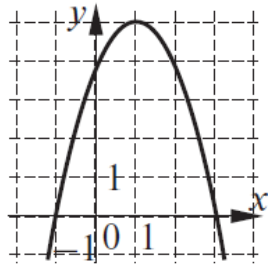
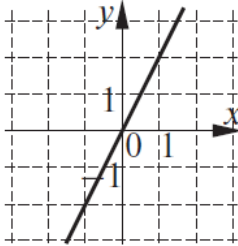
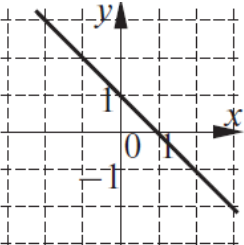
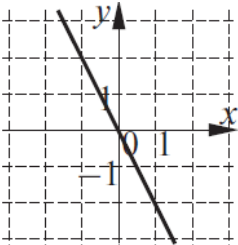
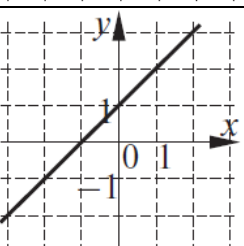
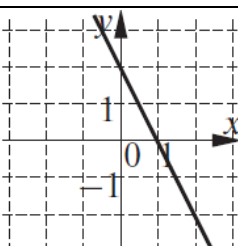
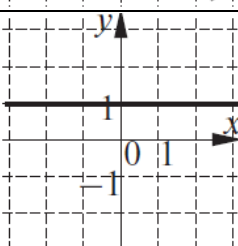


Рисунок 34

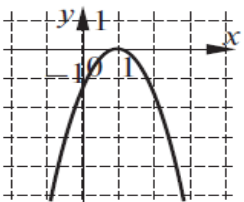
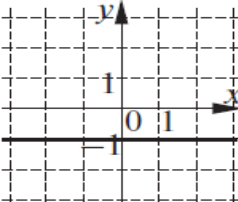
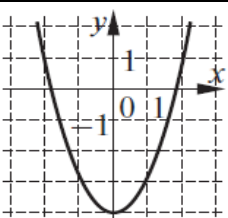
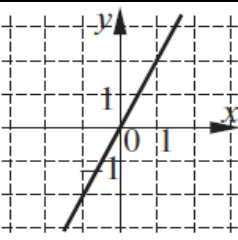
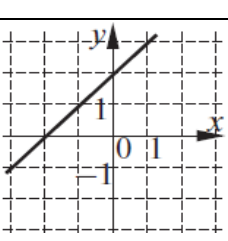
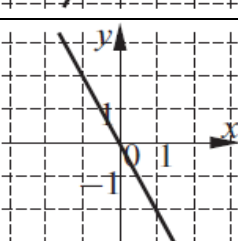
|                   |             |
|-------------------|-------------|
| 1. Дорівнює 1     | А. $f'(8)$  |
| 2. Від'ємне число | Б. $f'(5)$  |
| 3. Не існує       | В. $f'(1)$  |
| 4. Дорівнює 0     | Г. $f'(-1)$ |
|                   | Д. $f'(0)$  |

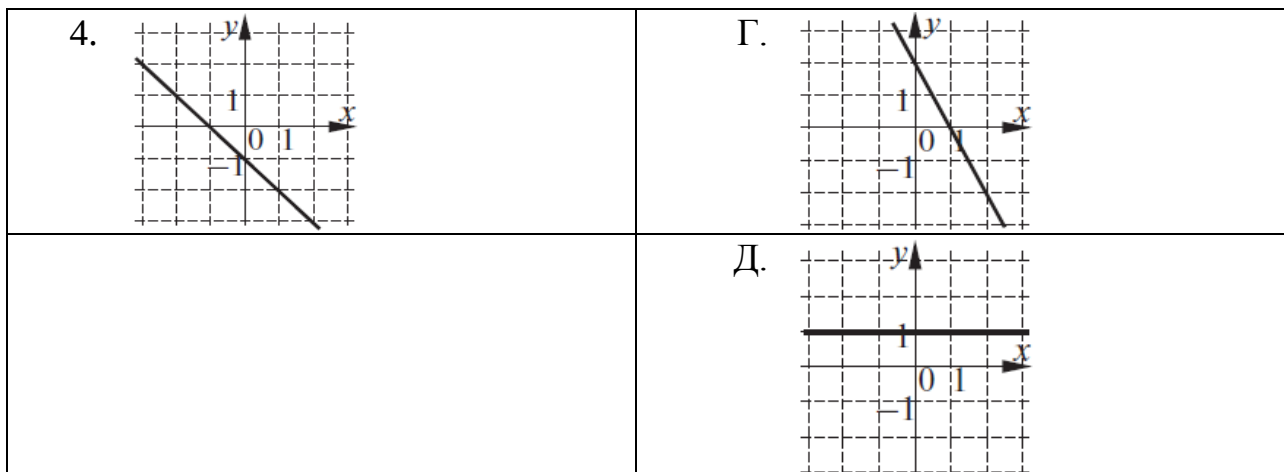
64. Установіть відповідність між заданими графіками функцій (1-4) та графіками їхніх похідних (А-Д).

|    |    |
|----|----|
| 1. | А. |
|----|----|

|    |                                                                                   |    |                                                                                     |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. |  | Б. |   |
| 3. |  | В. |   |
| 4. |  | Г. |   |
|    |                                                                                   | Д. |  |

65. Установіть відповідність між заданими графіками функцій (1–4) та графіками їхніх похідних (А–Д).

|    |                                                                                     |    |                                                                                      |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------|----|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. |  | А. |  |
| 2. |  | Б. |  |
| 3. |  | В. |  |



66. Установіть відповідність між функціями (1-4) та значенням функцій в точках максимуму цих функцій (А-Д).

|                             |       |
|-----------------------------|-------|
| 1. $f(x) = x^3 - 3x^2$      | А. 16 |
| 2. $f(x) = 2x^2 - x^4$      | Б. 4  |
| 3. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$ | В. 1  |
| 4. $f(x) = x^3 + 3x^2$      | Г. 0  |
|                             | Д. 6  |

67. Установіть відповідність між функціями (1-4) та значенням функцій в точках мінімуму цих функцій (А-Д).

|                                        |                    |
|----------------------------------------|--------------------|
| 1. $f(x) = x^3 - 3x^2$                 | А. $-6\frac{2}{3}$ |
| 2. $f(x) = 2x^2 - x^4$                 | Б. 6               |
| 3. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$       | В. 0               |
| 4. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x$ | Г. $-\frac{4}{3}$  |
|                                        | Д. -4              |

68. Установіть відповідність між функціями 1-4 та точками максимуму (А-Д).

|                                  |                      |
|----------------------------------|----------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$   | А. $-\frac{1}{4}; 1$ |
| 2. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ | Б. -7                |



|                                           |       |
|-------------------------------------------|-------|
| 3. $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^2 - 7x + 4$ | В. -1 |
| 4. $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$         | Г. 2  |
|                                           | Д. 7  |

69. Установіть відповідність між функціями 1-4 та точками мінімуму(А-Д).

|                                   |                  |
|-----------------------------------|------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$    | А. 1             |
| 2. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$  | Б. $\frac{3}{2}$ |
| 3. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 + 2$       | В. -2            |
| 4. $f(x) = 2 + x^2 + 2x^3 - 2x^4$ | Г. 0             |
|                                   | Д. -1            |

70. Установіть відповідність між функціями 1-4 та точками мінімуму (А-Д).

|                            |          |
|----------------------------|----------|
| 1. $f(x) = 0,5x^4$         | А. -2    |
| 2. $f(x) = x^2 - 6x$       | Б. 0     |
| 3. $f(x) = 12x - x^3$      | В. 3     |
| 4. $f(x) = 5 - 8x^2 + x^4$ | Г. -2; 2 |
|                            | Д. -3    |

71. Установіть відповідність між функціями (1-4) та їх найбільшим значенням на даному проміжку (А-Д).

|                                                          |                    |
|----------------------------------------------------------|--------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5, \quad [2; 4]$ | А. $-4\frac{2}{3}$ |
| 2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 7, \quad [-1; 3]$ | Б. 1               |
| 3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [0; 3]$          | В. 14              |
| 4. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3, \quad [0; 2]$         | Г. 8               |
|                                                          | Д. $-\frac{11}{3}$ |

72. Установіть відповідність між функціями (1-4) та їх найменшим значенням на даному проміжку (А-Д).

|                                                          |                     |
|----------------------------------------------------------|---------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5, \quad [2; 4]$ | А. 3                |
| 2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5x - 7, \quad [-1; 3]$ | Б. -19              |
| 3. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1, \quad [0; 3]$          | В. $-15\frac{1}{3}$ |
| 4. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3, \quad [0; 2]$         | Г. -5               |
|                                                          | Д. -6               |

73. Установіть відповідність між функціями (1-4) та точками максимуму (А-Д).

|                                  |          |
|----------------------------------|----------|
| 1. $f(x) = 12x - x^3$            | А. 2     |
| 2. $f(x) = 5 - 8x^2 + x^4$       | Б. 0     |
| 3. $f(x) = 7 - 6x^2 + x^3 - 15x$ | В. -1    |
| 4. $f(x) = x^2 - \frac{x^4}{2}$  | Г. -1; 1 |
|                                  | Д. -2    |

74. Установіть відповідність між функціями (1-4) та проміжками їх спадання (А-Д).

|                                                       |                       |
|-------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 7$                 | А. $(-\infty; 6]$     |
| 2. $f(x) = (x-1)^3(x-2)^2$                            | Б. $[\frac{8}{5}; 2]$ |
| 3. $f(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + x^4 + 3$ | В. $(-\infty; 0]$     |
| 4. $f(x) = (x+4)^4(x-3)^3$                            | Г. $[-4; 0]$          |
|                                                       | Д. $[4; 0]$           |

75. Установіть відповідність між функціями (1-4) та проміжками їх зростання (А-Д).

|                                  |                                              |
|----------------------------------|----------------------------------------------|
| 1. $f(x) = x^3 + 3x^2$           | А. $(-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; \infty)$  |
| 2. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ | Б. $(-\infty; -2] \cup [0; \infty)$          |
| 3. $f(x) = x^4 - 4x^2$           | В. $(-\infty; 0] \cup [2; \infty)$           |
| 4. $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^4$ | Г. $(-\infty; -2] \cup [0; 2]$               |
|                                  | Д. $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [0; \sqrt{2}]$ |

## Розділ IV. Завдання з відкритою формою відповіді

76. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку  
 $f(x) = \cos x - \frac{1}{4}x^4; [0; \pi]$ .
77. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку  
 $f(x) = 3\sin x - \sin 3x; [0; \pi]$ .
78. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = \cos x + (a-1)x$  має єдину критичну точку на проміжку  $\left[0; \frac{7\pi}{6}\right]$ ?
79. Дослідіть функцію на монотонність і екстремуми та побудуйте її графік  
 $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ .
80. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку  
 $f(x) = 2 + 3x^2 - x^3, [-1; 3]$ .
81. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку  
 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3, [0; 4]$ .
82. Знайдіть найбільше і найменше значення функції на даному проміжку  
 $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2, [-1; 4]$ .
83. Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f(x) = -x^3 + 3x|x-3|$  на проміжку  $[0; 4]$ .
84. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = (a-12)x^3 + 3(a-12)x^2 + 6x + 7$  зростає на  $R$ .
85. Залежно від значень параметра  $a$  знайдіть критичні точки функції  
 $f(x) = (2x-1)^4\sqrt{x-a}$ .
86. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = \frac{x^3}{3} + (a-1)\frac{x^2}{2} - 2(a-1)x - 9$  має додатну точку мінімуму?
87. Дослідіть функцію  $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x+4}$  та побудуйте (схематично) її графік. Визначте область значень цієї функції.
88. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = 4\ln x + ax - 3$  не має критичних точок?
89. Скільки критичних точок на проміжку  $[0; 1]$  має функція  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$  залежно від значення параметра  $a$ ?
90. Залежно від значень параметра  $a$  знайдіть точку максимуму функції  
 $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{a+2}{2}x^2 + 2ax + 4$ .

91. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = x^3 + ax^2 - 2ax + 3$  зростає на всій числовій прямій.
92. Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f(x) = x^3 - 2x|x - 2|$  на проміжку  $[0; 3]$ .
93. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , при яких функція  $f(x) = (a - 8)x^3 - 3(a - 8)x^2 - 12x + 5$  спадає на  $R$ .
94. Знайти проміжки зростання і спадання та точки екстремуму функції  $f(x) = \frac{x^2 - 8x}{x + 1}$ .
95. Залежно від значень параметра  $a$  знайдіть критичні точки функції  $f(x) = (3x - 2)\sqrt[6]{x - a}$ .
96. При яких значеннях параметра  $a$  функція  $f(x) = \frac{x^3}{3} - (a + 2)\frac{x^2}{2} - 3(a + 2)x - 1$  має від'ємну точку максимуму?
97. Знайдіть найбільше і найменше значення функції  $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$  на проміжку  $\left[-1; \frac{1}{8}\right]$ .
98. Дослідіть функцію на монотонність і екстремуми та побудуйте її графік  $f(x) = x^4 - 4x^2$ .
99. Дослідіть функцію на монотонність і екстремуми та побудуйте її графік  $f(x) = x^2 - \frac{1}{4}x^4$ .
100. Скільки критичних точок на проміжку  $[-2; 0]$  має функція  $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$  залежно від значення параметра  $a$ ?

## Використані джерела

1. Вікіпедія – вільна енциклопедія (електронний ресурс)  
Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/fizma.net/index.php?idi=alg/stepin>
2. ЗНО 2015 Математика Комплексна підготовка \ Уклад.: А.М. Капіносов, Г.І. Білоусова та інші-Тернопіль: Підручники та посібники, 2014 р. - 528 с.  
Режим доступу: [http://zno-zno.at.ua/publ/zno\\_2015/zno\\_2015\\_matematik](http://zno-zno.at.ua/publ/zno_2015/zno_2015_matematik)
3. Повний курс математики в тестах \ Ю.О. Захарійченко, О.В. Школьний, Л.І. Захарійченко, О.В. Школьна - Харків, «Ранок», 2011 р. – 496 с.
4. ЗНО 2016 Математика . Поглиблений та базовий рівні. Комплексне видання \ Уклад.: А.М. Капіносов, Г.І. Білоусова та інші - Тернопіль: Підручники та посібники, 2015 р. - 528 с.
5. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики, 11 клас: У 2 книгах, Кн.2 \ М.І. Бурда, О.Я. Біляніна, О.П. Вашуленко та інші, - Харків, «Гімназія», 2008 р. - 224 с.
6. Математика в школах України №11 (275) квітень 2010 р.
7. Алгебра 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навчальн. закладів: академ. рівень, проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. - Харків, Гімназія, 2012 р. - 431 с.

Матеріали підготувала Рознюк Людмила Василівна, вчителька математики закладу «Загальноосвітня школа І-ІІІ ступенів №20 Вінницької міської ради», учитель - методист.

Матеріали перевірила Салтановська Н.І., завідувач лабораторії математики комунального вищого навчального закладу «Вінницька академія неперервної освіти», кандидат педагогічних наук, доцент.